معادلات الدرجة الثانية

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية في مجهول

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a,b,c \in R, a \neq 0$$

وحلها يعطي بالقانون العام

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويسمى المقدار $b^2 - 4ac$ بمميز المعادلة

$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac = 0$	$b^2 - 4ac < 0$
• يوجد حلان حقيقيان مختلفان	• يوجد حلان حقيقيان متساويان (حل حقيقي واحد مكرر)	• لا يوجد حل

مثال 1

أوجد حل المعادلة $x^2 - 5x + 2 = 0$

الحل

حيث أن: $a = 1, b = -5, c = 2$

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(1)(2) = 25 - 8 = 17 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

مثال 2

أوجد حل المعادلة $2x^2 + 3x - 2 = 0$

الحل

حيث أن: $a = 2, b = 3, c = -2$

$$b^2 - 4ac = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

$$\Longrightarrow \quad x_1 = \frac{3+5}{4} = 2, \qquad x_1 = \frac{3-5}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال 3

أوجد حل المعادلة $x^2 - 2x + 5 = 0$

الحل

حيث أن:

$$a = 1, b = -2, c = 5$$

$$b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0$$

وبالتالي المعادلة ليس لها حل حقيقي

مثال 4

أوجد حل المعادلة $x^2 - 4x + 3 = 0$

الحل

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Longrightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$$

$$\Longrightarrow x - 3 = 0, x - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = 3, x = 1$$

حالات خاصة:

إذا كانت $c = 0$ تصبح معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد وتكون علي الصورة $ax^2 + bx = 0$ وحلها $x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$

إذا كانت $b = 0$ فإن المعادلة تصبح علي الصورة $ax^2 + c = 0$ وحلها $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$ بشرط أن $\frac{c}{a} < 0$

إذا كانت $b = 0, c = 0$ فإن المعادلة تصبح علي الصورة $ax^2 = 0$ وحلها $x_{1,2} = 0$

مثال 5

أوجد حل المعادلة $x^2 - 4x = 0$

الحل

$$x^2 - 4x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(x-4) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \, , x - 4 = 0$$

مثال 6

أوجد حل المعادلة $x^2 - 1 = 0$

الحل

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 1 \Longrightarrow \quad x = \pm 1$$

مثال 7

أوجد حل المعادلة $\sqrt{x+2} = x$

الحل

$$\sqrt{x+2} = x$$

بتربيع الطرفين

$$\Rightarrow \quad x+2 = x^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$
$$\Rightarrow x-2 = 0, x+1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 2, x = -1$$

مثال 8

أوجد حل المعادلة $\sqrt{x^2-1}-\sqrt{15}=0$

الحل

$$\sqrt{x^2-1}-\sqrt{15}=0$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2-1}=\sqrt{15}$$

بتربيع الطرفين نجد أن

$$x^2-1=15$$

$$\Rightarrow \quad x^2=16 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 4$$

مثال 9

أوجد حل المعادلة $\sqrt[3]{x^2+2x}=2$

الحل

$$\sqrt[3]{x^2+2x}=2$$

بتكعيب الطرفين

$$\Rightarrow x^2+2x=8$$
$$\Rightarrow x^2+2x-8=0$$
$$\Rightarrow (x+4)(x-2)=0$$
$$\Rightarrow x+4=0, x-2=0$$
$$\Rightarrow x=-4, x=2$$

مثال 10

أوجد حل المعادلة $\frac{x+6}{3} = -\frac{3}{x}$

الحل

$$\frac{x+6}{3} = -\frac{3}{x}$$

بضرب الطرفين في الوسطين نجد أن

$$\Rightarrow \quad x^2 + 6x = -9$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -3, x = -3$$

المتراجحات الخطية

نظرية:

اذا كانت $a,b,c \in \mathbb{R}$ وكانت $a < b$ فان

- $a + c < b + c$
- $a - c < b - c$
- $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- إذا كانت $c > 0$ فان $ac < bc$
- إذا كانت $c < 0$ فان $ac > bc$
- إذا كانت $b < c$ و $a < b$ فان $a < c$

قاعدة 1:

حل المتراجحة $x < a$ هو $(-\infty, a)$

قاعدة 2:

حل المتراجحة $x \leq a$ هو $(-\infty, a]$

قاعدة 3:

حل المتراجحة $x > a$ هو (a, ∞)

قاعدة 4:

حل المتراجحة $x \geq a$ هو $[a, \infty)$

مثال 1

أوجد حل المتراجحة $2x - 12 < x - 6$

الحل

$$2x - 12 < x - 6$$

$$\Rightarrow \quad 2x - x < -6 + 12$$

$$\Rightarrow \quad x < 6$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 6)$$

مثال 2

أوجد حل المتراجحة $2x - 12 \leq x - 6$

الحل

$$2x - 12 \leq x - 6$$

$$\Rightarrow \quad 2x - x \leq -6 + 12$$

$$\Rightarrow \quad x \leq 6$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 6]$$

مثال 3

أوجد حل المتراجحة $3x - 2 > x + 6$

الحل

$$2x - 12 > x - 6$$

$$\Rightarrow \quad 2x - x > -6 + 12$$

$$\Rightarrow \quad x > 6$$

$$\Rightarrow x \in (6, \infty)$$

مثال 4

أوجد حل المتراجحة $2x - 12 \geq x - 6$

الحل

$$2x - 12 \geq x - 6$$

$$\Rightarrow \quad 2x - x \geq -6 + 12$$

$$\Rightarrow \quad x \geq 6$$

$$\Rightarrow x \in [6, \infty)$$

مثال 5

أوجد حل المتراجحة $2 - 3x \leq 11$

الحل

$$2 - 3x \leq 11$$

$$\Longrightarrow \quad -3x \leq 11 - 2$$

$$\Longrightarrow -3x \leq 9$$

$$\Longrightarrow \quad x \geq -3$$

$$\Longrightarrow \quad x \in [-3, \infty)$$

قاعدة 5:

حل المتراجحة $a < x < b$ هو (a,b)

قاعدة 6:

حل المتراجحة $a < x \leq b$ هو $(a,b]$

قاعدة 7:

حل المتراجحة $a \leq x < b$ هو $[a,b)$

قاعدة 8:

حل المتراجحة $a \leq x \leq b$ هو $[a,b]$

مثال 6

أوجد حل المتراجحة $2 < 2x - 12 < 6$

الحل

$$2 < 2x - 12 < 6$$

$$\Rightarrow 12 + 2 < 2x < 6 + 12$$

$$\Rightarrow 14 < 2x < 18$$

$$\Rightarrow 7 < x < 9$$

$$\Rightarrow x \in (7, 9)$$

مثال 7

أوجد حل المتراجحة $-6 < x - 2 \leq 5$

الحل

$$-6 < x - 2 \leq 5$$

$$\Rightarrow 2 - 6 < x \leq 5 + 2$$

$$\Rightarrow -4 < x \leq 7$$

$$\Rightarrow x \in (-4, 7]$$

مثال 8

أوجد حل المتراجحة $3 \leq 2x - 3 < 7$

الحل

$$3 \leq 2x - 3 < 7$$

$$\Rightarrow 3 + 3 \leq 2x < 7 + 3$$

$$\Rightarrow 6 \leq 2x < 10$$

$$\Rightarrow 3 \leq x < 5$$

$$\Rightarrow x \in [3, 5)$$

مثال 9

أوجد حل المتراجحة $2 \leq 2x - 12 \leq 8$

الحل

$$2 \leq 2x - 12 \leq 8$$

$$\Rightarrow 12 + 2 \leq 2x \leq 8 + 12$$

$$\Rightarrow 14 \leq 2x \leq 20$$

$$\Rightarrow 7 \leq x \leq 10$$

$$\Rightarrow x \in [7, 10]$$