قواسم الأعداد و جبر الكسور

في هذا الفصل سوف ندرس قواسم الأعداد الصحيحة المنتمية للمجموعة Z و بعض العمليات الجبرية علي الأعداد الكسرية المنتمية للمجموعة Q.

١- قواسم العدد :

تعريف:

إذا كان $a, b \in Z$ فيقال أن

العدد b أحد قواسم العدد a أو العدد a يقبل القسمة علي العدد b

إذا كان يوجد عدد صحيح c بحيث أن $a = cb$.

مثال:

١- العدد 24 يقبل القسمة علي 8 لأن

$$24 = (3)(8)$$

٢- العدد 5 أحد قواسم العدد 20 لأن

$$20 = (4)(5)$$

٣- العدد 28 يقبل القسمة علي 7 لأن

$$28 = (4)(7)$$

مثال:

العدد 21 لا يقبل القسمة علي 8 لأنه لا يوجد عدد صحيح يمكن أن يضرب في 8 حتي يكون ناتج حاصل الضرب 21.

الأعداد الأولية

تعرف:

العدد الأولي هو العدد الذي يقبل القسمة فقط علي عددين نفسه و الواحد الصحيح.

مثال:

الأعداد الأولية هي مجموعة غير منتهية ومنها

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

مثال:

الأعداد غير الأولية هي التي لها قواسم غير نفسها و الواحد الصحيح مثل $9, 12, 100$ لأن

$$9 = (3)(3)$$

$$12 = (3)(4)$$

$$100 = (2)(50)$$

إيجاد قواسم العدد

لإيجاد قواسم العدد نقوم بتحليلة كما يلي

مثال:

أوجد قواسم العدد 30

الحل

2	30
3	15
5	5
	1

$$\boxed{30 = (2)(3)(5)}$$

إذاً قواسم العدد 30 هي

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

مثال:

أوجد قواسم العدد 42

الحل

$$\begin{array}{r|l} 2 & 42 \\ 3 & 21 \\ 7 & 7 \\ & 1 \end{array}$$

$$\boxed{42 = (2)(3)(7)}$$

إذا قواسم العدد 42 هي

1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42

مثال:

أوجد قواسم العدد 45

الحل

$$\begin{array}{r|l} 3 & 45 \\ 3 & 15 \\ 5 & 5 \\ & 1 \end{array}$$

$$\boxed{45 = (3)(3)(5)}$$

إذا قواسم العدد 45 هي

1, 3, 5, 9, 15, 45

القواسم المشتركة لعددين

مثال:

أوجد القواسم المشتركة بين العددين 42 و 30

الحل

قواسم العدد 30 هي

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

قواسم العدد 42 هي

1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42

إذاً القواسم المشتركة بين العددين 42 و 30 هي الأعداد

1, 2, 3, 6

ويكون القاسم المشترك الأكبر بينهما هو العدد 6

مثـال:

أوجد القواسم المشتركة بين العددين 42 و 45

الحل

قواسم العدد 42 هي

1, 2, 3, 7, 6, 14, 21, 42

قواسم العدد 45 هي

1, 3, 5, 9, 15, 45

القواسم المشتركة بين العددين 42 و 45 هي الأعداد

1, 3

ويكون القاسم المشترك الأكبر بينـهما هو العدد 3

مثال:

أوجد القواسم المشتركة بين العددين 30 و 45

الحل

قواسم العدد 30 هي

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

قواسم العدد 45 هي

1, 3, 5, 9, 15, 45

القواسم المشتركة بين العددين 42 و 45 هي الأعداد

1, 3, 5, 15

ويكون القاسم المشترك الأكبر بينهما هو العدد 15

القاسم المشترك الأكبر لعددين

يمكن حساب القاسم المشترك الأكبر لعددين من خلال تحليل العددين و أخذ القواسم المشتركة ذات الأس الأصغر

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر بين العددين 20 و 150

الحل

$$20 = (2^2)(5)$$

$$150 = (2)(3)(5^2)$$

إذاً القاسم المشترك الأكبر بين العددين 20 و 150

$$= (2^1)(5^1) = 10$$

مثال:

أوجد القاسم المشترك الأكبر بين العددين 12 و 180

الحل

أوجد القاسم المشترك الأكبر بين العددين 12 و 180

$$12 = (2^2)(3)$$

$$180 = (2^2)(3^2)(5)$$

إذاً القاسم المشترك الأكبر بين العددين 12 و 180

$$= (2^2)(3^1) = 12$$

مضاعفات العدد

مثال:

يمكن الحصول علي مضاعفات العدد 3 كما يلي

3, 6, 9, 12, ...

مثال:

يمكن الحصول علي مضاعفات العدد 2 كما يلي

2, 4, 6, 8, ...

المضاعف المشترك الأصغر لعددين

مثال:

مضاعفات العدد 3 هي .... ,3, 6, 9, 12

مضاعفات العدد 2 هي .... ,2, 4, 6, 8

إذاً المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3 هو 6

ملاحظه:

يمكن حساب المضاعف المشترك الأصغر لعددين من خلال تحليل العددين و أخذ جميع قواسم العددين بالأس الأكبر

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 20 و 30

الحل

$$20 = \left(2^2\right)(5)$$

$$30 = (2)(3)(5)$$

إذاً المضاعف المشترك الأصغر للعددين 2 و 3

$$= \left(2^2\right)(3)(5) = 60$$

مثال:

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18

الحل

$$12 = (2^2)(3)$$

$$18 = (2)(3^2)$$

إذاً المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18

$$= (2^2)(3^2) = 36$$

ملاحظه:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين أوليين هو حاصل ضربهما

مثال:

المضاعف المشترك الأصغر للعددين 11 و 3

$$= (3)(11) = 33$$

جمع و طرح الكسور

قاعدة:

إذا كان $a, b, x, y \in R$ بحيث $b \neq 0$ و $y \neq 0$ فإن

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{ay + bx}{by}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{x}{y} = \frac{ay - bx}{by}$$

مثال:

$$\frac{3}{5} - \frac{2}{7} = \frac{(3)(7) - (5)(2)}{(5)(7)} = \frac{11}{35}$$

مثال:

$$\frac{5}{2}+\frac{11}{3}=\frac{(5)(3)+(2)(11)}{(2)(3)}=\frac{37}{6}$$

مثال:

$$\frac{-3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{(-3)(7)+(5)(2)}{(5)(7)}=\frac{-11}{35}$$

ضرب و قسمة الكسور

قاعدة:

إذا كان $a, b, x, y \in R$ بحيث $b, y, x \neq 0$ فإن

$$\frac{a}{b} \times \frac{x}{y} = \frac{a\,x}{b\,y}$$

$$\frac{a}{b} \div \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{y}{x} = \frac{a\,y}{b\,x}$$

مثال:

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{(2)(5)}{(3)(7)} = \frac{10}{21}$$

مثال:

$$\frac{-2}{7} \times 6 = \frac{-2}{7} \times \frac{6}{1} = \frac{(-2)(6)}{(7)(1)} = \frac{-12}{7}$$

$$\frac{4}{5} \div \frac{7}{9} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{7} = \frac{(4)(9)}{(5)(7)} = \frac{36}{35}$$

$$8 \div \frac{3}{5} = \frac{8}{1} \div \frac{3}{5} = \frac{8}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{(8)(5)}{(1)(3)} = \frac{40}{3}$$

تبسيط الكسور و الكسور المتكافئه

قاعدة:

إذا قمنا بتحليل بسط و مقام الكسر و إختصرنا العوامل المشتركة فإن الكسر الناتج هو أبسط صورة للكسر الأصلي كما يقال أن الكسران الأصلي و الناتج متكافئان

مثال:

بسط الكسر $\frac{12}{18}$

الحل

$$\frac{12}{18} = \frac{(2)(2)(3)}{(2)(3)(3)} = \frac{2}{3}$$

إذاً أبسط صورة للكسر $\frac{12}{18}$ هي الكسر $\frac{2}{3}$ و يقال بأنهما متكافئين

مثال:

بسط الكسر $\frac{165}{210}$

الحل

$$\frac{165}{210} = \frac{(3)(5)(11)}{(2)(3)(5)(7)} = \frac{11}{14}$$

إذاً أبسط صورة للكسر $\frac{165}{210}$ هي الكسر $\frac{11}{14}$ و يقال بأنهما متكافئين

مقارنة الكسور

مثال:

قارن بين الكسرين $\frac{2}{5}$ و $\frac{1}{4}$

الحل

$$\frac{1}{4} = \frac{(1)(5)}{(4)(5)} = \frac{5}{20}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{(2)(4)}{(5)(4)} = \frac{8}{20}$$

إذاً $\frac{2}{5} < \frac{1}{4}$

مثال:

قارن بين الكسرين $\frac{4}{11}$ و $\frac{3}{7}$

الحل

$$\frac{3}{7} = \frac{(3)(11)}{(7)(11)} = \frac{33}{77}$$

$$\frac{4}{11} = \frac{(4)(7)}{(11)(7)} = \frac{28}{77}$$

إذاً $\frac{4}{11} < \frac{3}{7}$

مثال:

قارن بين الكسرين $\frac{12}{20}$ و $\frac{3}{5}$

الحل

$$\frac{3}{5} = \frac{(3)(4)}{(7)(4)} = \frac{12}{20}$$

إذاً $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$