

الدوال

تعريف:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فإن (x, y) يسمى زوج مرتب بحيث أن $x \in A, y \in B$

تعريف:

الزوج المرتب (x, y) يساوي الزوج المرتب (a, b) إذا كان $x = a$ و $y = b$

مثال 1

الزوج المرتب $(3,5)$ يساوي الزوج المرتب $(3,5)$

الزوج المرتب $(1,7)$ لا يساوي الزوج المرتب $(7,1)$

الزوج المرتب $(-1,7)$ لا يساوي الزوج المرتب $(1,7)$

تعريف:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فان حاصل الضرب الكرتيزي يعرف

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

مثال 1

إذا كان $A = \{-2, 3, 6\}$ و $B = \{4, 7\}$ فإن حاصل الضرب الكارتيزي

$$A \times B$$

$$= \{(-2, 4), (-2, 7), (3, 4), (3, 7), (6, 4), (6, 7)\}$$

$$B \times A$$

$$= \{(4, -2), (4, 3), (4, 6), (7, -2), (7, 3), (7, 6)\}$$

ملاحظة 1:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فإن $A \times B \neq B \times A$

ملاحظة 2:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فإن رتبة $A \times B$ تساوى رتبة $B \times A$ أى أن

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \times |B|$$

مثال 2

إذا كان $A = \{x, y, z\}$ و $B = \{-1, 2, 5, 8\}$ فإن $|A \times B| = 12$

تعريف:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فان العلاقة بين A و B مجموعة جزئية من $A \times B$ وتسمى مجموعة الأعداد في الأحداثي الأول بمجال العلاقة وتسمى مجموعة الأعداد في الأحداثي الثاني بمدى العلاقة

مثال 3

إذا كان $A = \{-1, 3, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6\}$ فان
 $A_1 = \{(-1, 2), (5, 2), (3, 6), (5, 6)\}$
علاقة من A الى B
المجال $= \{-1, 3, 5\}$ و المدى $= \{2, 6\}$

تعريف:

إذا كان A و B مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة $f: A \rightarrow B$ تسمى دالة إذا كان لكل عنصر في A له صورة واحدة فقط في B

مجال تعريفها هو المجموعة A ويرمز له بالرمز D_f

و مجالها المقابل هو المجموعة B

و مداها هو مجموعة صور عناصر المجموعة A وهو مجموعة جزئية من المجموعة B ويرمز له بالرمز R_f

مثال 4

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{-1, 0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وكان $f_1: A \rightarrow B$ فان $f_1 = \{(1, -1), (2, 5), (3, 8), (4, 7)\}$ تمثل دالة.

المجال $D_f = A = \{1, 2, 3, 4\}$

والمجال المقابل $B = \{-1, 0, 5, 6, 7, 8, 9\}$

والمدي $R_f = \{-1, 5, 7, 8\}$

مثال 5

إذا كان $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{-1, 0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ وكان $f_1: A \rightarrow B$ فان $f_1 = \{(1, -1), (1, 0), (2, 6), (3, 9), (4, 7)\}$ لا تمثل دالة.

مثال 6

إذا كانت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي و $f(x) = 1 - x^3$ فان

$$f(1) = 1 - (1)^3 = 0$$

مثال 7

إذا كانت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي و $f(x) = \frac{1+x^2}{x}$ فان

$$f(-1) = \frac{1 + (-1)^2}{-1} = \frac{1 + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

مثال 8

إذا كانت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة كالتالي و $f(x) = 7 + 3x$ فان

$$f(2) = 7 + 3(2) = 7 + 6 = 13$$

الدوال الجبرية

تعريف:

الدالة كثيرة الحدود هي الدالة التي على الصورة

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $a_n \neq 0$ و $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$

حيث n عدد صحيح أكبر من أو يساوى الصفر، n تسمى درجة كثيرة الحدود.

مجال جميع كثيرات الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية
 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

مثال 6

تسمى الدالة $y = a$ دالة ثابتة حيث $a \in \mathbb{R}$ ودرجتها تساوي صفر.

مثال 7

تسمى الدالة $y = f(x) = ax + b$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ دالة خطية ودرجتها تساوي 1 .

مثال 8

تسمى الدالة $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ دالة تربيعية ودرجتها تساوي 2 .

مثال 9

تسمى الدالة $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ و $a \neq 0$ دالة تكعيبية ودرجتها تساوي 3 .

مثال 10

الدالة $f(x) = x^5 - \sqrt{2}x^4 + 1$ تمثل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة.

مثال 11

الدالة $f(x) = 7x^2 + 12\sqrt{x}$ لا تمثل كثيرة حدود.

مثال 12

الدالة $f(x) = 2x^{-2} - 3$ لا تمثل كثيرة حدود

تعريف:

تسمى الدالة $y = |f(x)|$ دالة المقياس حيث $f(x)$ كثيرة حدود

مجال دالة المقياس هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\mathbb{R}^+ = (-\infty, \infty) \cup \{0\}$

مثال 13

الدالة المطلقة للمتغير x .
 $y = |x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$ تسمى دالة القيمة

تعريف:

تسمى الدالة $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ دالة كسرية حيث $f(x)$ و $g(x)$ كثيرات حدود

مجال تعريفها دائما مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ما عدا قيم x التي تجعل المقام $g(x) = 0$ أى ان المجال هو $\mathbb{R} - \{x: g(x) = 0\}$

مثال 13

الدالة $f(x) = \frac{x}{x+1}$ تمثل دالة كسرية ومجالها $\mathbb{R} - \{-1\}$

مثال 14

الدالة $f(x) = \frac{x^2+5x-3}{x^3-1}$ تمثل دالة كسرية ومجالها $\mathbb{R} - \{1\}$

مثال 15

الدالة $f(x) = \frac{2-\sqrt{x}}{x+1}$ لا تمثل دالة كسرية .

مثال 16

الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^3+11}}$ لا تمثل دالة كسرية .

تعريف:

تسمى الدالة $y = \sqrt[n]{f(x)}$ دالة جذرية حيث $f(x)$ كثيرة حدود و $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

مجال تعريفها هو جميع قيم x بحيث $f(x) \geq 0$ وذلك عندما n عدد زوجي

مجال تعريفها هو $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ وذلك عندما n عدد فردي

مثال 17

الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 3}$ تمثل دالة جذرية

مثال 18

الدالة $f(x) = \sqrt{x+3}$ تمثل دالة جذرية ومجالها $[-3, \infty)$

مثال 19

الدالة $f(x) = \sqrt{x-5}$ تمثل دالة جذرية ومجالها $[5, \infty)$

مثال 20

الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x+2}} - x + 3$ لا تمثل دالة جذرية .